Un model simplu de geometrie Smarandache construit exclusiv cu elemente de geometrie euclidiană

Conf. univ. dr. Ovidiu Șandru
Catedra de Matematici II, Universitatea Politehnică
Splaiul Independenței 313, sector 6
București, România

În spațiul euclidian tridimensional considerăm două plane paralele și distincte α_1 și α_2. Spațiul Smarandache Σ, pe care îl definim, este alcătuit din punctele acestor două plane, sau altfel zis, $\Sigma = \alpha_1 \cup \alpha_2$. Tot prin definiție, considerăm că dreptele acestui spațiu sunt date de reuniunea tuturor dreptelor (euclidiene) incluse în α_1, sau α_2. În legătură cu elementele modelului geometric Σ enunțăm următoarele definiții :

Definiția 1 : Orice două drepte (ale modelului Σ) care nu se intersectează între ele se numesc drepte paralele.

Definiția 2 : Despre o dreaptă (din Σ) spunem că separă două puncte distincte (din Σ) nesituate pe această dreaptă dacă segmentul determinat de aceste două puncte se intersectează cu dreapta dată.

În continuare vom analiza pe acest model geometric valorile de adevăr a următoarelor trei axiome ale geometriei euclidiene plane :

Propoziția 1 : Prin orice două puncte distincte (ale planului euclidian) trece o dreaptă și numai una.

Propoziția 2 (Postulatul lui Euclid) : Pintr-un punct exterior unei drepte trece o singură paralelă la cea dreaptă.

Propoziția 3 (Axioma de separare a planului) : Fie d o dreaptă și A, B și C trei puncte nesituate pe d. Dacă dreapta d separă punctele A și B dar nu separă punctele B și C, atunci ea separă punctele A și C.

1) Fie A și B sunt două puncte distincte din Σ.
   i) Dacă $A, B \in \alpha_1$, sau dacă $A, B \in \alpha_2$, atunci prin aceste puncte trece o dreaptă a spațiului Σ și numai una .
   ii) Dacă $A \in \alpha_1$ și $B \in \alpha_2$, sau $A \in \alpha_2$ și $B \in \alpha_1$, atunci prin aceste puncte nu trece nici o dreaptă a spațiului Σ.

2) Fie d este o dreaptă a spațiului Σ și A un punct din Σ nesituat pe d.

i) Dacă punctul A și dreapta d sunt în același plan ($A\in \alpha_1, d\subset \alpha_1$, sau $A\in \alpha_2, d\subset \alpha_2$), atunci prin punctual A nu putem duce decât o paralelă la dreapta d .

ii) Dacă punctul A și dreapta d sunt în plane diferite ($A\in \alpha_1, d\subset \alpha_2$, etc), atunci prin punctul A putem duce o infinitate de (drepte care să nu intersecteze dreapta d) paralele la dreapta d .

3) Fie d este o dreaptă, iar A,B,C sunt trei puncte ale spațiului Σ care nu aparțin lui d .

i) Dacă cele trei puncte A,B,C și dreapta d se găsesc incluse în același plan, atunci pentru aceste elemnte se verifică axioma de separare.

ii) Dacă unul dintre punctele A,B,C se găsește într-un plan diferit de planul în care se găsesc celellalte două puncte și dreapta d , atunci axioma de separare nu mai este verificată pentru aceste elemente.

Observații : 1) Spre deosebire de modelul geometriei euclidiene unde Propoziția 1 are valoare de axiomă, în cadrul modelului geometric construit de noi această propoziție nu este nici total adevărată , nici total falsă, ci prezintă un grad de incertitudine egal cu 0.5. Într-adevăr, alegând la întâmplare două puncte distincte din Σ , probabilitatea ca prin aceste puncte să treacă o dreaptă a spațiului Σ este egală cu probabilitatea evenimentului contrar, adică cu 0.5.
2) În mod asemănător, celebrul postulat al lui Euclid din geometria plană are în cadrul modelului nostru geometric o valoare de adevăr bivalentă : Alegând la întâmplare din Σ o dreaptă și un punct care nu este situat pe această dreaptă, șansele ca postulatul lui Euclid să fie verificat sau infirmat sunt ambele egale cu 0.5. Același lucru se întâmplă și cu axioma de separare.
3) Modelul geometric prezentat se poate generaliza ușor considerând în loc de două plane paralele și distincte, $n\geq 3$ plane paralele și distincte și chiar cazul unui număr infinit de plane paralele și distincte din spațiu. În acest context spațiul Smarandache corespunzător va fi notat cu $\sum_n$, respectiv, cu $\sum_\infty$, iar spațiul $\sum$ prezentat mai devreme va coincide cu $\sum_2$.
4) Modelele geometrice geometrice $\sum_n, n\geq 2$, $\sum_\infty$, sunt construite exclusiv cu elemente ale geometriei euclidiene.
5) Spațiul $\sum = \sum_2$ prezentat mai devreme reprezintă cel mai simplu model de geometrie Smarandache.

O soluție parțială a conjecturii lui Kuciuk și Antholy

În [1] Kuciuk și Antholy au formulat următoarea problemă :

“Is there a general model for all Smarandache Geometries in such a way that replacing some parameters one gets any of the desired particular SG?"

În cele ce urmează vom construi o familie uniparametrică de modele geometrice care va constitui, cel puțin parțial, o soluție la această problemă. Pentru aceasta vom extinde familia de spații $\sum_n, n\geq 2$, la familia $\sum_n, n\geq 1$, în care $\sum_1$ va reprezenta planul euclidian autentic (mulțimea punctelor spațiului $\sum_1$ este dată de mulțimea punctelor planului euclidian 2-dimensional, iar dreptele spațiului $\sum_1$ sunt dreptele, în sens euclidian, ale acestui plan). În felul acesta obținem familia unidimensională de

spații $\sum_n, n \geq 1$, care pentru $n = 1$ furnizează modelul clasic al geometriei euclidiene, iar pentru orice $n \geq 2$, în parte, câte o geometrie Smarandache cu diferite ordine de incertitudine, sau de negare.

Bibliografie

[1] L. Kuciuk and M. Antholy, An Introduction to the Smarandache Geometries, Mathematics Magazine, Aurora, Canada, Vol. 12, 2003.